→ Diagonalisons : $\bar{\nabla}_s\left(\frac{1}{2} e_{ij} s_i s_j\right)$

On trouve $s_i s_j e_{ij} = e'_{11}(s_1')^2 + e'_{22}(s_2')^2 + e'_{33}(s_3')^2$

Si on place notre système d'axe au point P, on a :

$$\bar{u}_Q - \bar{u}_P = \delta\bar{u}|_{\bar{P}} = \begin{pmatrix} e'_{11} s_1' \\ e'_{22} s_2' \\ e'_{33} s_3' \end{pmatrix}$$

. C'est une contraction / dilatation dans les directions s_1', s_2' et s_3'.

→ Si l'écoulement est incompressible ;

$$\sum_i e'_{ii} = \mathrm{Tr}(e'_{ij}) = \mathrm{Tr}(e_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_i (\partial_i u_i + \partial_i u_i) = 0$$

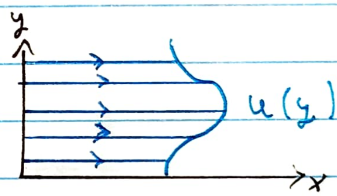
Dans un fluide incompressible, la trace est nulle.

2 INTRO AUX FLUIDES VISQUEUX

2.1 Introduction

→ Considérons un écoulement cisaillé simple :

$\bar{u} = [u(y), 0, 0]$



DEF Un fluide est dit Newtonien si la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse.

Ici, $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ avec μ la viscosité moléculaire

force par unité de surface

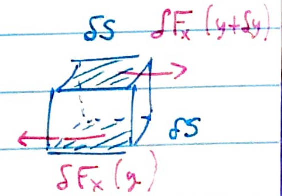
DEF On appelle viscosité cinématique la qté $\nu \equiv \mu / \rho$

2.2 Equation de Navier-Stokes

→ Calculons la force de surface due à la viscosité qui s'exerce sur un PDF :

$$\delta F_x(y+\delta y) = \tau(y+\delta y).\delta S = \mu \frac{du}{dy}(y+\delta y).\delta S$$

$$\delta F_x(y) = -\tau(y).\delta S = -\mu \frac{du}{dy}(y).\delta S$$



$$\hookrightarrow \sum \delta F = \mu\, \delta S\left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta V} \equiv \delta f = \frac{\mu\, \delta S}{\delta S\, \delta y}\left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right) = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

→ En rajoutant cette contribution à l'équation d'Euler (1), on a :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\partial_x p + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

→ En généralisant, on obtient l'équation de Navier-Stoke

$$\rho D_t \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}$$

⊙ Remarque tensorielle :

→ La force qui s'exerce sur un élément de surface de fluide peut s'exprimer comme $\delta F_i = \sigma_{ij} n_j \delta S$ où σ_{ij} est un tenseur de rang 2. On peut montrer que σ_{ij} est symétrique.

? → On décompose alors $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + d_{ij}$ où d_{ij} est un tenseur symétrique sans trace, et $-p\,\delta_{ij} \equiv Tr(\sigma_{ij})$

? → On fait l'hypothèse que d_{ij} dépend linéairement des ∇u :

$$d_{ij} = A_{ij}^{\ \ kl}\, \partial_k u_l$$

↳ Si homogène et isotrope,

→ $A_{ij}^{\ \ kl}$ indépendant de $\vec{x}$

? → $A_{ij}^{\ \ kl}$ invariant sous les rotations (construction avec δ)

↳ $A_{ij}^{\ \ kl} = \mu\, \delta_i^{\ k} \delta_j^{\ l} + \mu' \delta_i^{\ l} \delta_j^{\ k} + \mu'' \delta_{ij} \delta^{lk}$. Or, $\mu = \mu'$ (si $i \leftrightarrow j$)

↳ $d_{ij} = \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \mu'' \partial_k u_k \delta_{ij}$

$= 2\mu\, e_{ij} + \mu'' (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{ij}$ Or, $Tr(d_{ij}) = d_{ii} = 0$

↳ $d_{ii} = 2\mu + \mu'' . 3 = 0$

↳ $d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\delta_{ij}\right)$

→ On revient à $\delta F_i = -p\,\delta_{ij} n_j \delta S + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\delta_{ij}\right) n_j \delta S$

→ La force par volume est donnée par :

$$\delta f_i = \frac{1}{V}\int_{\partial V} \delta F_i\, \delta S = \frac{1}{V}\int_V -\partial_i p + 2\mu\, \partial_j\left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\delta_{ij}\right) dV$$

→ Bilan d'impulsion ($\sim F = ma$)

$$\rho D_t \bar{u}_i = -\nabla_i p + \partial_j\left[2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\delta_{ij}\right)\right]$$

↳ Si l'écoulement est incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

$$\rho D_t \bar{u}_i = -\nabla_i p + \partial_j[2\mu\, e_{ij}] = -\nabla_i p + \partial_j \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

$$= -\nabla_i p + \mu \partial_j \partial_j u_i$$

On retrouve $\rho D_t \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}$ (Euler)

⊙ Condition aux bords :

→ De manière empirique, on constate que sur les bords des solides, la vitesse du fluide s'annule.

DEF On appelle la condition de non-glissement / no-slip condition la condition aux bords suivante :

$$\vec{u}_{\parallel} = 0 \Big|_{\text{surface d'un solide}}$$

⊙ Le nombre de Reynolds :

DEF On définit le nombre de Reynolds Re par :

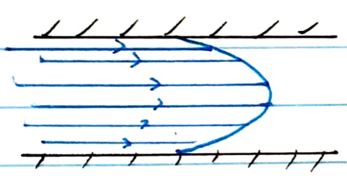
$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$

où U est la vitesse caractéristique, L la longueur caractéristique et ν la viscosité cinématique du fluide.

→ Re caractérise le rapport entre l'inertie du fluide et le terme visqueux.
Si $Re \gg 1$, le terme non-linéaire de N-S ($(\vec{u}.\vec{\nabla}).\vec{u}$) domine
Si $Re \ll 1$, le terme visqueux domine ($\mu \nabla^2 \vec{u}$)

2.3 Ecoulement visqueux simples

⊙ Ecoulement de Poiseuille plan :



→ On cherche une solution du type :
$\vec{u} = [u(y,t), 0, 0]$

$$\left(\partial_t \vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}\frac{P}{\rho} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} \right)$$

→ Selon x : $\partial_t u + \cancel{u \partial_x u} + \cancel{v \partial_y u} + \cancel{w \partial_z u} = -\frac{1}{\rho}\partial_x P + \nu \partial_y^2 u$

$\Leftrightarrow \partial_t u \overset{(*)}{=} -\frac{1}{\rho}\partial_x P + \nu \partial_y^2 u$

→ Selon y : $\partial_y P = 0$

→ Selon z : $\partial_z P = 0$

↳ Puisque dans $(*)$, $\partial_t u$ et $\nu \partial_y^2 u$ ne dépendent pas de x, on a $\partial_x P = f(t)$

→ Cherchons une solution indépendante du temps :

$$\partial_t u = 0 = \frac{-1}{\rho}\partial_x P + \nu \partial_y^2 u$$

→ On pose $\partial_x P = +K$. On a :

$$\mu \partial_y^2 u = K \Rightarrow u = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y^2 + My + N$$ M,N cste d'intégrat°.

→ Condition aux bords : $u(y=0) = u(y=h) = 0$

↳ $u(y=0) = N = 0$ $\qquad u = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y^2 + My$

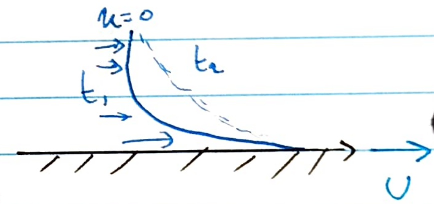
↳ $u(y=h) = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}h^2 + Mh = 0 \Rightarrow M = \frac{-Kh}{2\mu}$

On trouve : $u = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y^2 - \frac{Khy}{2\mu} = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}y(y-h)$

⊙ Ecoulement dû à une plaque mise soudainement en mvt :

→ On suppose qu'aucun gradient de pression n'est imposé de l'extérieur et que $u(t<0) = 0$. On doit donc résoudre :

$$\partial_t u(y,t) = \nu \partial_y^2 u$$



avec les conditions :

$u(y,0) = 0 \quad \forall t<0, y>0$ et

$u(0,t>0) = U$ et $u(y\to\infty, t) \to 0$

→ L'équation est invariante lorsque ($y \mapsto \alpha y$ et $t \mapsto \alpha^2 t$), on peut

? alors définir $\eta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$ et chercher une solution qui ne dépend que de η :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} = \partial_\eta u \cdot \frac{-y}{2\sqrt{\nu t^3}} = \frac{-1}{2}u'\cdot\frac{\eta}{t}$$

$$\partial_y u = \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = u'\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu t}} \ ; \ \partial_y^2 u = u''\frac{1}{\nu t}$$

↳ $\frac{-1}{2}u'\cdot\frac{\eta}{t} = \nu u''\cdot\frac{1}{\nu t} \Leftrightarrow \frac{u''}{u'} = \frac{-1}{2}\eta \Rightarrow u'' + \frac{1}{2}\eta u' = 0$

$$\Rightarrow (\ln u')' = \frac{-1}{2}\eta \Leftrightarrow \ln u' = \frac{-1}{4}\eta^2 + K \Rightarrow u' = \tilde{K} e^{-\frac{1}{4}\eta^2}$$

$$\Rightarrow f = \tilde{K}\int_0^\eta e^{-\frac{1}{4}s^2}\, ds + A$$

→ Condition aux bords:

→ $u(0,t) = U \rightarrow f = \tilde{K}\int_0^0 e^{-1/4 s^2} ds + A = A \overset{!}{=} U$

→ $u(y,t) \xrightarrow{y\to\infty} 0 \Rightarrow f(\infty) = \tilde{K}\int_0^\infty e^{-1/4 s^2} ds + U = \tilde{K}\sqrt{\pi} + U \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \tilde{K} = \frac{-U}{\sqrt{\pi}}$

On trouve: $u(y,t) = U\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y/\sqrt{\nu t}} e^{-s^2/4} ds\right\}$

→ Remarques:

→ la vitesse tend vers 0 lorsque l'on s'éloigne de la paroi d'une distance de quelques $y/\sqrt{\nu t}$

→ La zone dans laquelle la vitesse est non-nulle croît comme $\sim\sqrt{t}$

2.4 Ecoulements axisymmétriques

→ Considérons l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible ($\bar{\nabla}.\bar{u} = 0$): $\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}.p + \nu\bar{\nabla}^2\bar{u}$

→ On veut écrire ces équations en coordonnées cylindriques. On a:

→ $\bar{u} = u_r \bar{e}_r + u_\theta \bar{e}_\theta + u_z \bar{e}_z$

→ $(\bar{u}.\bar{\nabla}) = u_r\partial_r + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta + u_z\partial_z$

→ $\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \partial_z^2$

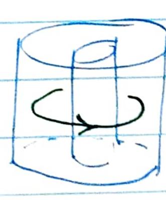
→ $\partial_\theta \bar{e}_r = \bar{e}_\theta$; $\partial_\theta \bar{e}_\theta = -\bar{e}_r$; $\partial_\theta \bar{e}_z = 0$. Alors:

$$\begin{cases} \partial_t u_r + (\bar{u}.\bar{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p + \nu\left(\bar{\nabla}^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_\theta\right) \\ \partial_t u_\theta + (\bar{u}.\bar{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\partial_\theta p + \nu\left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2}\right) \\ \partial_t u_z + (\bar{u}.\bar{\nabla})u_z = -\frac{1}{\rho}\partial_z p + \nu\bar{\nabla}^2 u_z \end{cases}$$

Les termes supplémentaires apparaissent à cause du fait que les vecteurs de base ne sont pas constants.

→ On suppose une solution particulière:

(*) $\bar{u} = u_\theta(r,t)\vec{e}_\theta$



Les lignes de courant sont des cercles.

↳ Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} ① \quad -\dfrac{u_\theta^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\partial_r P \\ ② \quad \partial_t u_\theta = \dfrac{-1}{\rho r}\partial_\theta P + \nu\left(\partial_r^2 u_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_r u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2}\right) \\ ③ \quad 0 = \dfrac{-1}{\rho}\partial_z P \end{cases}$$

① ⇒ ∃ gradient de pression radial à cause de la vitesse tangentielle, afin de contrebalancer la "force centrifuge".

③ ⇒ Pas de gradient de pression car pas de pesanteur

② Puisque $u = u(r,t)$, on a aussi $\partial_\theta p = \partial_\theta p(r,t)$

$\Rightarrow p = f(r,t)\theta + g(r,t)$

→ Mais P est une valeur mesurable ! Sa dépendance linéaire en $\theta \Rightarrow$ discontinuité. Donc $p = g(r,t)$

→ L'équation devient :

$$② \Rightarrow \partial_t u_\theta = \nu\left(\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r}\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2}\right) \quad (*)$$

⊙ Ecoulement stationnaire entre 2 cylindres :

→ On cherche une solution particulière (stationnaire) du système. On pose $u_\theta = u_\theta(r)$. Alors l'équation (*) se réduit à :

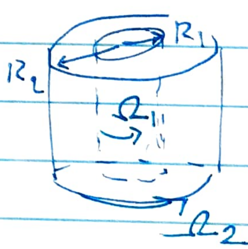
$$\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r}\partial_r u_\theta - u_\theta/r^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \partial_r^2 u_\theta + \partial_r(u_\theta/r) = 0$

$\Leftrightarrow \partial_r u_\theta + u_\theta/r = K$

$\Leftrightarrow r\partial_r u_\theta + u_\theta = Kr \Leftrightarrow \partial_r(u_\theta r) = Kr$

$\Leftrightarrow r u_\theta = \dfrac{Kr^2}{2} + M \Rightarrow u_\theta = Ar + B/r$



→ Conditions aux bords :

① En $r = r_1$, $\quad u_\theta = r_1\Omega_1 = Ar_1 + B/r_1$

② En $r = r_2$, $\quad u_\theta = r_2\Omega_2 = Ar_2 + B/r_2$

On trouve :

$$A = \frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\Omega_1 - \Omega_2)}{r_1^2 - r_2^2}$$